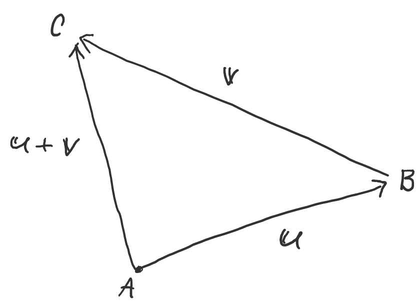
FL3

Thursday, September 4, 2014 10:02 AM

# ADDITION AV VEKTORER

$u + v$ definieras enligt:




dvs: Välj $\vec{AB} \in u$, välj $\vec{BC} \in v$

Då är $u+v$ vektorn som representeras av $\vec{AC}$

# MULTIPLIKATION MED SKALÄRER

Låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är $\lambda u$ vektorn som har längd $|\lambda||u|$ och är parallell med $u$ och riktningen är samma som $u$'s om $\lambda \geq 0$, motsatt $u$ om $\lambda < 0$.


# RÄKNEREGLER (SATS 1)

## ADDITION

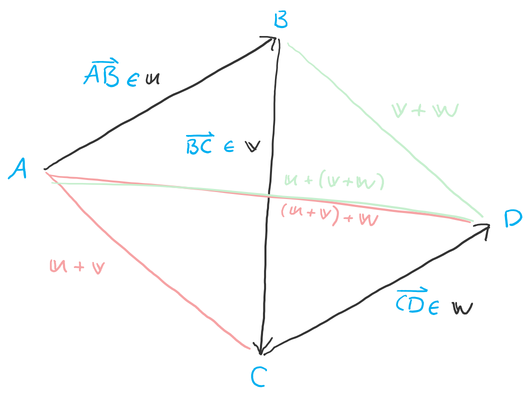
1. $u + v = v + u$ (kommutativitet)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativitet)
3. $u + (-1)u = 0$
4. $u + 0 = u$

## MULTIPLIKATION MED SKALÄR

5. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u = \lambda\mu u$
6. $1 \cdot u = u$
7. $0 \cdot u = 0$
8. $\lambda \cdot 0 = 0$
9. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
10. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

$\Big\}$ mult. och add., (distributivitet)

# BEVIS 2




Slutsats:
$u + (v+w) = (u+v) + w$

Alternativt:
$u + (v+w)$ repr. av

$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$

på samma sätt med högerled

så $(u+v) + w$ repr. $\vec{AD}$

DING!

# BEVIS 6

$1 \cdot u = u$: $1u$ är vektorn som har en längd $|1||u| = |u|$ och riktningen på $1u$ är den samma som $u$'s riktning, eftersom $1 > 0$.

Alltså är $1u = u$ (ty en vektor är bestämd av sin längd och riktning)

DING!

# ADDITIV INVERS (SUBTRAKTION)

Givet $u$, så finns en unik vektor $v$ sådan att $u + v = 0$.
Vi betecknar denna med $-u$.

## BEVIS

- Existens (dvs $v$ finns)

  Enl. räkneregel 3 kan vi välja
  $v = (-1)u$

- Entydlighet:

  Vill visa att om $\overset{*}{u + v = 0}$ och $\overset{**}{u + v' = 0}$ så är $v = v'$

  $$\underset{\text{regel 4}}{v} = v + 0 \underset{(**)\text{ hypotes}}{=} v + (u + v') = (v+u) + v' = (u+v) + v' = 0 + v' = v' + 0 = v'$$

# Linjärt beroende/oberoende

## Notation

Vi låter $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{R}^1$) beteckna vektorer på linjen, 1:a dimension
— " — $\mathbb{R}^2$ — " — i planet, 2:a dimension
— " — $\mathbb{R}^3$ — " — i rummet, 3:e dimension

I kap 6 introduceras vektorer i $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

## Definition

- En vektor $u \in \mathbb{R}^n$ sägs vara en linjärkombination av vektorerna $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ omm det finns $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ så att $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = u$

**OBS!** $\mathbb{0}$-vektorn kan skrivas $0 \cdot v = \mathbb{0}$, så den är en linjär av vilka vektorer som helst.

## Definition

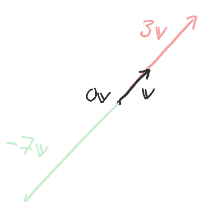
- Vi betecknar mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \dots, v_p$ som span$(v_1, \dots, v_p)$

- Vi säger att $v_1, \dots, v_p$ "spänner upp" span$(v_1, \dots, v_p)$

**Ex.** Låt $v$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$ (planet)

Vad är span$(v)$?
Svar: alla vektorer som är parallella med $v$.

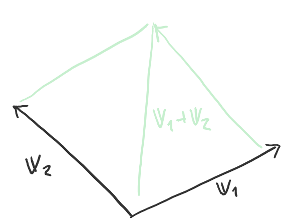
$\Leftrightarrow$ en linjärkombination av en vektor $v$, är en vektor som är parallell med den, dvs på formen $\lambda v$.




En typisk linjärkombo av $v$ är

$3v$, $0v$ och $-7v$

**Ex.** $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$: exempel på linjärkombo av $v_1$ och $v_2$ är
$v_1 + v_2$

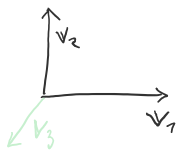



span$(v_1, v_2)$ = hela planet

**EX.** Hur många vektorer behövs för att spänna upp planet resp. rummet?

planet: 2 icke-parallella vektorer spänner planet.

rummet: 3 vektorer som inte ligger i ett plan spänner upp rummet.




där $v_3$ pekar "ut ur tavlan."

## DEFINITION 2

$v_1, \dots, v_p$ är linjärt oberoende om
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ (*)
endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

## SATS

De två definitionerna är ekvivalenta. (Sats 5, s 36)